Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Zahlentheorie I (Algebraische Zahlentheorie), WiSe 22/23
Blatt 3

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Bestimmen Sie für alle Primzahlen $p \geq 3$ den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\omega+\omega^{-1}) \subseteq \mathbb{Q}(\omega)$, wobei $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ eine primitive p-te Einheitswurzel ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei R ein quadratischer Zahlring.

(i) Zeigen Sie, dass jedes Ideal $I \subseteq R$ endlich erzeugt ist und dabei maximal zwei Erzeuger benötigt.

(ii) Braucht das Ideal $(2, \sqrt{-14}) \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ zwei Erzeuger?

(iii) Wie sieht es mit dem Ideal $(17 + 2\sqrt{-14}, 20 + \sqrt{-14}) \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ aus? Braucht es zwei Erzeuger?

Aufgabe 3 (5 Punkte):
In der Vorlesung haben wir die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln betrachtet, welche eine zyklische Gruppe der Ordnung n bilden. Sei nun K ein Körper. Zeigen Sie, dass allgemeiner jede endliche Untergruppe von $K^\times$ zyklisch ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Satz 4.8 aus der Vorlesung besagt, dass Zahlringe imaginär-quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ genau dann norm-euklidisch sind, wenn $m \in \{-1, -2, -3, -7, -11\}$ ist. Wir wollen uns nun überlegen, dass Selbiges auch gilt, wenn wir "norm-euklidisch" durch "euklidisch" ersetzen. Sei dafür m eine quadratfreie negative ganze Zahl, welche nicht in obiger Liste auftaucht und sei A der zugehörige Zahlring.

(i) Rechnen Sie nach, dass $N(x) > 3$ für alle Nichteinheiten $x \in A \setminus \{0\}$ ist.

(ii) Nehmen Sie an, es gäbe eine euklidische Funktion $\varphi\colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ und wählen Sie eine Nichteinheit $x_0 \in A \setminus \{0\}$ mit minimalem $\varphi(x_0)$. Zeigen Sie nun, dass ein beliebiges Element $x \in A$ kongruent zu 0 oder ± 1 modulo dem von x_0 erzeugten Ideal $(x_0) \subseteq A$ ist.

(iii) Wir werden kommende Woche sehen, dass die Norm eines Elementes $y \in A$ mit der Kardinalität des Quotienten $A/(y)$ übereinstimmt. Vollenden Sie damit die Argumentation.